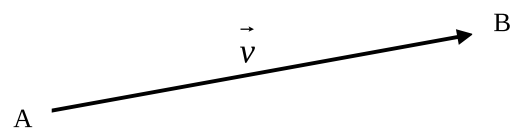
VECTORES EN EL PLANO

Vector fijo.

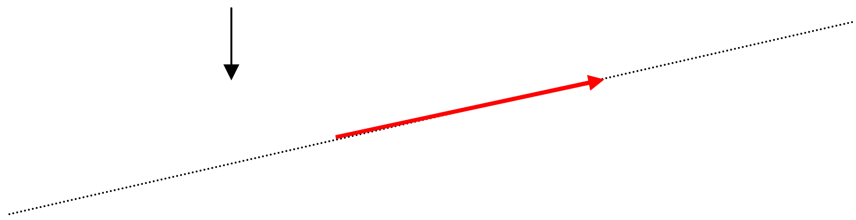
Es un segmento orientado. Lo representamos por $\overrightarrow{AB}$ o por $\vec{v}$. El punto A es el origen y el punto B el extremo. Mientras no preste confusión el vector $\vec{v}$ podemos expresarlo simplemente por ***v.***



Características de un vector.

Módulo: Es la longitud del vector. Lo representamos por $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ o $\left\|\vec{v}\right\|$. Las barras verticales pueden ser también sencillas.

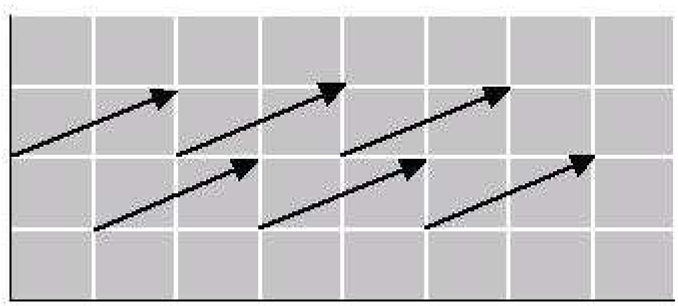
Dirección: Es la dirección de la recta que lo contiene. Si dos vectores son paralelos tienen la misma dirección.



Sentido: Es el que va del origen al extremo. Lo representamos por la punta de la flecha. Una dirección tiene dos sentidos.

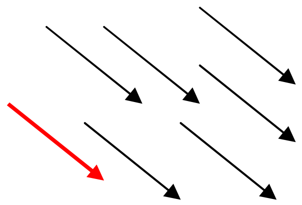
Vectores equipolentes:

Son aquellos que tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido.



Vector libre.

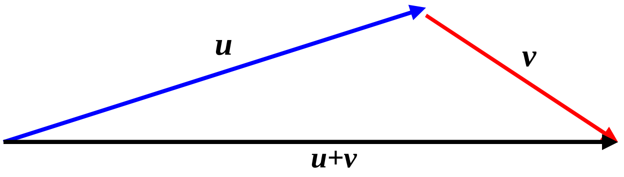
Es el conjunto formado por un vector fijo y todos los vectores equipolentes a él.



Suma geométrica de vectores.

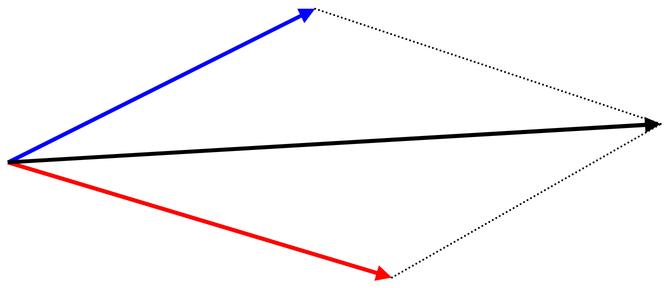
Para sumar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ podemos hacerlo de dos maneras:

1.- Desde un punto cualquiera del plano colocamos un vector equipolente a $\vec{u}$ y a partir del extremo de este colocamos otro vector que sea equipolente a $\vec{v}$ de manera que coincidan el extremo del primero con el origen del segundo. La suma es el vector que tienen como origen el origen del primero y como extremo el extremo del segundo.



2.- Ley del paralelogramo: Formamos un paralelogramo con dos vectores equipolentes a los dados de forma que coincidan los orígenes y la suma es la diagonal del paralelogramo tomando como origen el origen de los vectores equipolentes elegidos.

La suma de vectores es conmutativa.



Producto de un vector *v* por un número real k.

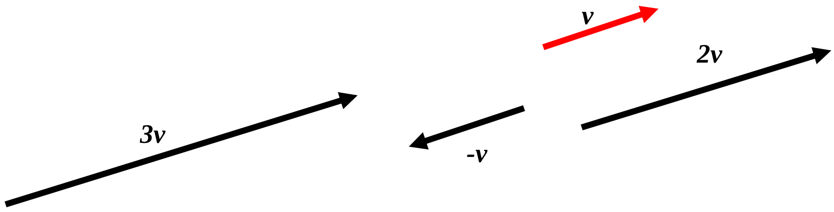
Es otro vector que expresamos por $\overrightarrow{kv}$ y que tiene:

Dirección: la misma que ***v***

Sentido: el mismo que ***v*** si **k** es positivo y sentido contrario si **k** es negativo.

Módulo: el producto del módulo de ***v*** por el valor absoluto de **k**.

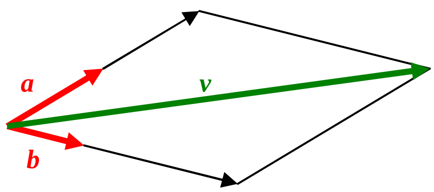
$$\left\|\overrightarrow{kv}\right\| = |k|.\left\|\vec{v}\right\|$$



Combinación lineal de vectores.

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, diremos que el vector $\vec{v}$ es combinación lineal de ellos si existen dos números reales **x** e **y** tales que $\vec{v} = x.\vec{a} + y.\vec{b}$.

Ejemplo:



v*=2.*a*+3.*b

¿Cómo expresar un vector $\vec{v}$ como combinación lineal de otros dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?.

Colocamos $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{v}$ con el origen común.

Trazamos rectas paralelas que contienen a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

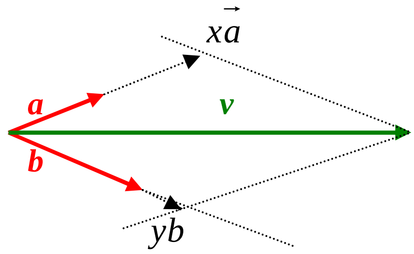
Desde los extremos de $\vec{v}$ trazamos paralelas a $\vec{a}$ y a $\vec{b}$.

Los puntos de corte determinan los vectores $\vec{a}'$ y $\vec{b}'$.

Buscamos un número real **x** que multiplicado por $\vec{a}$ nos de $\vec{a}'$.

Buscamos un número real **y** que multiplicado por $\vec{b}$ nos de $\vec{b}'$.

Por definición de suma de vectores resulta que $\vec{v} = x.\vec{a} + y.\vec{b}$



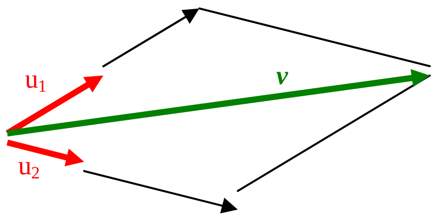
Base.

Dos vectores cualesquiera del plano con distinta dirección forman una base porque nos permiten expresar cualquier otro vector como combinación lineal de ellos.

Una base

Otra base

Si los vectores los llamamos $\overrightarrow{u_1}$ y $\overrightarrow{u_2}$, la base la expresamos en la forma $B = \{u_1, u_2\}$



De este modo se verifica que $v = x\overrightarrow{u_1} + y\overrightarrow{u_2}$

A los números (x, y) se les llama coordenadas de ***v*** respecto de la base **B**

Base canónica del plano. (Base ortonormal)

Es el conjunto formado por dos vectores perpendiculares y de módulo unidad, (vectores unitarios).

Suele expresarse por $B = \{i, j\}$, siendo ***i*** y ***j*** los vectores citados.

Se verifica entonces que $i \perp j$ y que $\|i\| = \|j\| = 1$

Sistema de referencia en el plano.

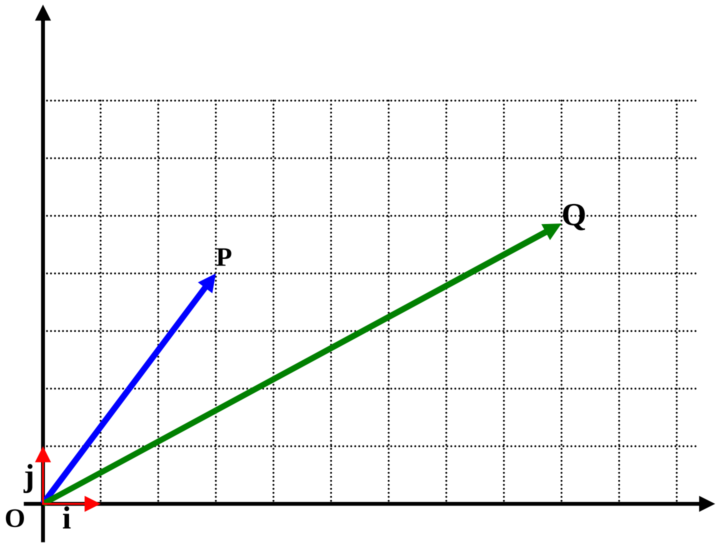
Es el conjunto formado por:

- Un punto fijo **O,** llamado origen.

- Una base cualquiera.

Tomando la base canónica $B=\{i,\ j\}$ como base habitual, un sistema de referencia queda expresado en la forma siguiente: $\mathcal{R}=\{O,\{i,\ j\}\}$

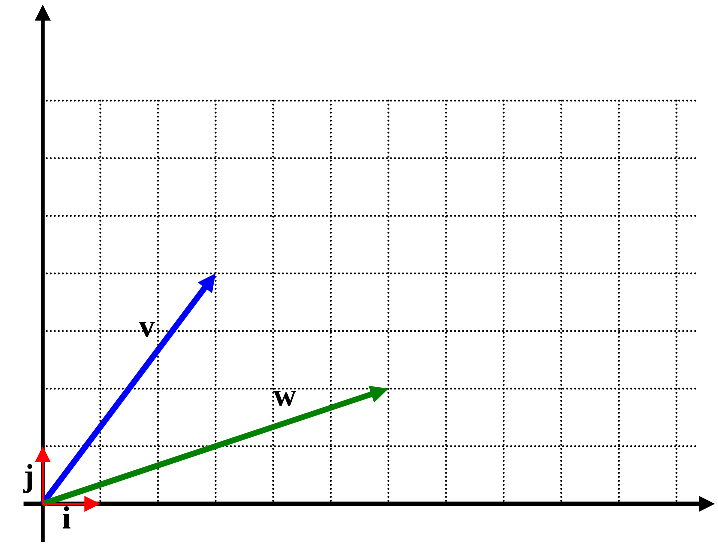
Dado un sistema de referencia , a cada punto ***P*** del plano se le asocia un vector $\overrightarrow{OP}$ que recibe el nombre de vector de posición



Al punto **P** se le asocia el vector de posición $\overrightarrow{OP}$

Al punto **Q** se le asocia el vector de posición $\overrightarrow{OQ}$

Coordenadas de un vector en una base ortonormal.



Los vectores ***i*** y ***j*** se pueden expresar como combinación lineal de ellos mismos.

i=1.***i***+0.***j***

j=0.***i***+1.***j***

Es decir,

Las coordenadas de ***i*** son (1, 0)

Las coordenadas de ***j*** son (0, 1)

Podemos, por tanto, expresar ***i*** y ***j*** en función de sus coordenadas.

I *=(1, 0)*

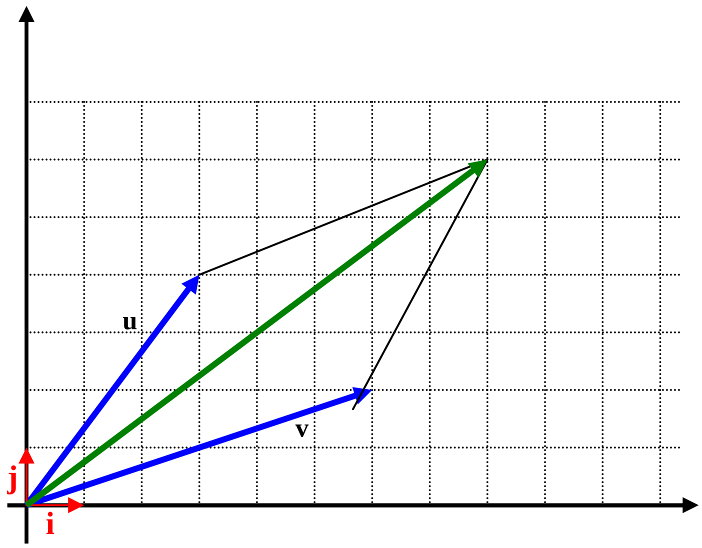
j = (0. 1)

En el caso de ***v*** y ***w*** será: ***v*** = 3i +4j = (3, 4); ***w*** =6i +2j = (6, 2)

En general, si ***v*** =xi + yj, podemos poner ***v*** = (x, y) donde **x** e **y** son las coordenadas del vector.

Operaciones con vectores expresados en coordenadas de una base canónica.

Suma:

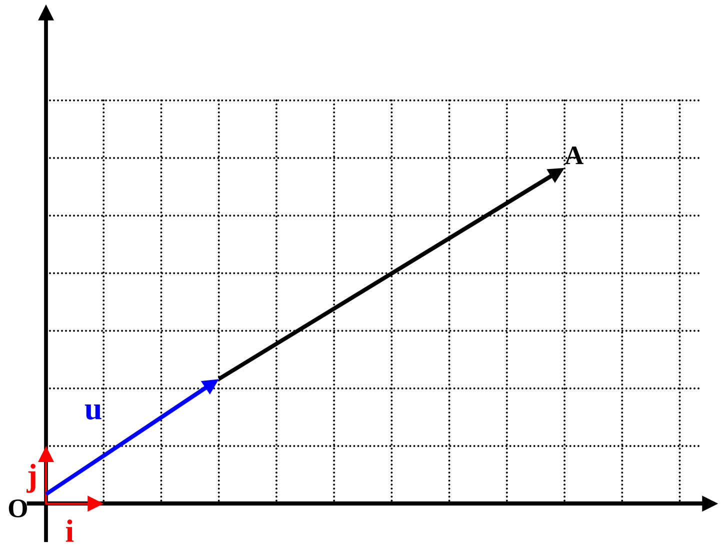


$$u = 3i + 4j = (3{,}1)$$
$$v = 6i + 2j = (6{,}2)$$
$$u + v = 8i + 6j = (8{,}6)$$

Vemos que las coordenadas de ***u+v*** se obtienen sumando las coordenadas de ***u*** y ***v***

En general, si $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ entonces, $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Producto:



Coordenadas de $\vec{u} = (3,2)$

Coordenadas de $\overrightarrow{3u} = \overrightarrow{OA} = (9,6)$

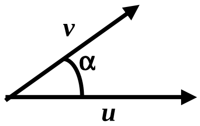
Las coordenadas $\overrightarrow{3u}$ se obtienen multiplicando por **3** las coordenadas de ***u***

En general, si $u = (x, y)$, $\overrightarrow{ku} = (kx, ky)$

Producto escalar de dos vectores.

Es el número que se obtiene al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\cos\alpha$$



El producto escalar es conmutativo.

Si los vectores vienen expresados en coordenadas de una base ortonormal, el producto escalar adopta la siguiente forma:

$$\vec{u} = x_1 i + y_1 j \,; \qquad \vec{v} = x_2 i + y_2 j \,,$$

$\vec{u}.\vec{v} = (x_1 i + y_1 j).(x_2 i + y_2 j)$, es decir,

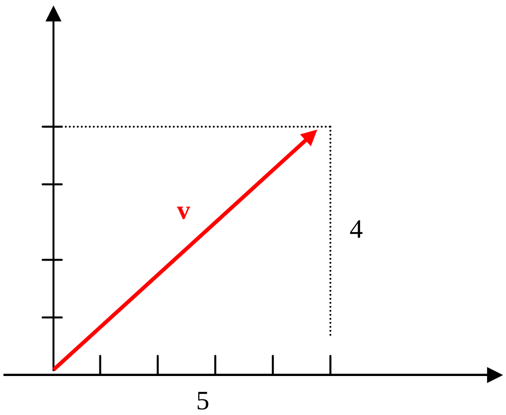
$$\vec{u}.\vec{v} = (x_1 x_2)(i.i) + (x_1 y_2)(ij) + (y_1 x_2)(ji) + (y_1 y_2)(jj) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

teniendo en cuenta que ***i.i=1*** y que ***i.j=j.i=0***. $(\cos 0^{\circ} = 1 \text{ y } \cos 90^{\circ} = 0)$

Módulo de un vector.

Lo hacemos a través de un ejemplo:

Seal el vector $v = 5i + 4j = (5,4)$



Por el teorema de Pitágoras:

$$\|v\|^2 = 5^2 + 4^2$$

$$\|v\| = +\sqrt{5^2 + 4^2}$$

El módulo de ***v*** es la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de las coordenadas.

En general, si $v = (x, y)$ entonces,

$$\|v\| = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

El producto escalar podemos utilizarlo también para determinar el módulo de un vector .

Sea el vector *v*:

Si calculamos el producto escalar de *v* por sí mismo resulta:

$v.v = \|v\|.\|v\|.\cos\alpha = \|v\|\|v\| = \|v\|^2$ y entonces resulta que $\|v\|^2 = v.v \Rightarrow \|v\| = \sqrt{v.v}$

es decir, el módulo de un vector es la raiz cuadrada positiva del producto escalar de un vector por sí mismo.

Ángulo de dos vectores.

Se obtiene aplicando la fórmula de definición de producto escalar.

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}}$$

Ejercicios resueltos

1.- Dados los vectores $\vec{a}(5,-3)$ y $\vec{b}(-2,6)$

a) Súmalos analíticamente.

b) Súmalos geométricamente.

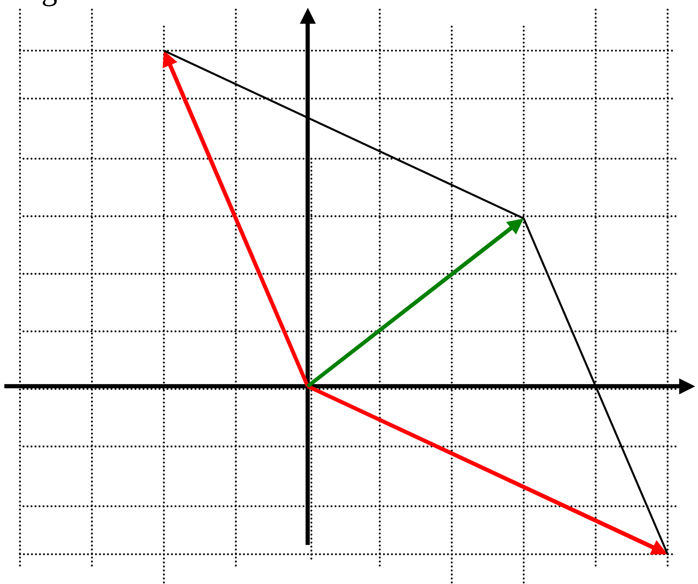
c) Calcula analíticamente $4\vec{a}-7\vec{b}$

Solución:

a) Sumamos la 1ª coordenada del vector a con la 1ª coordenada del vector b y la 2ª coordenada del vector a con la 2ª coordenada del b, es decir,

$\vec{a}+\vec{b}=(5+(-2),(-3)+6)=(3,3)$

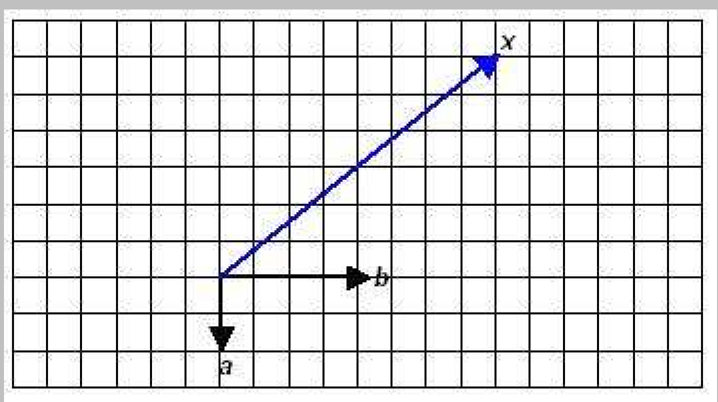
b) Construimos paralelogramo:



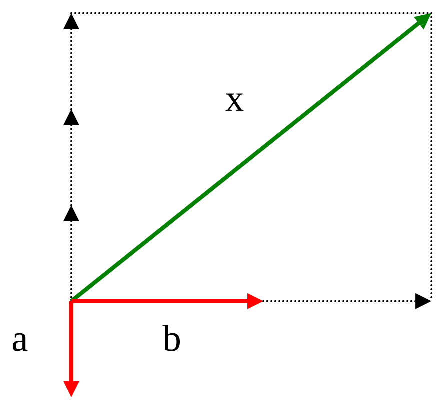
La suma es la diagonal del paralelogramo.

c) $4\vec{a}-7\vec{b}$ = *4(5, - 3) – 7(- 2, 6) = (20, - 12) – (- 14, 42) = (34, - 54)*

2.- Expresa el vector **x** como combinación lineal de **a** y **b**.



Solución:



Hemos construido un paralelogramo de modo que la diagonal sea el vector **x**

Y observando la figura se obtiene que ***x* = - *3a* + *2b***

3.- Las componentes de **u**, **v** y **w** respecto de una cierta base son ***u*** = *(5,0)*, ***v*** = *(2,1)* y ***w*** = *(1,-2)*. Expresa el vector **u** como combinación lineal de los otros.

Solución:

$u = \alpha.v + \beta.w$, es decir, $(5,0) = \alpha(2,1) + \beta(1,-2)$

Lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 5 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos por reducción multiplicando la primera ecuación por 2 y sumándola con la segunda:

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 10 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow 5\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 5$$

Sustituyendo el valor de α obtenido en la segunda ecuación del sistema se obtiene que $\beta = 5/2$

La combinación lineal queda de la forma siguiente:

$$u = 5.v + \frac{5}{2}.w$$

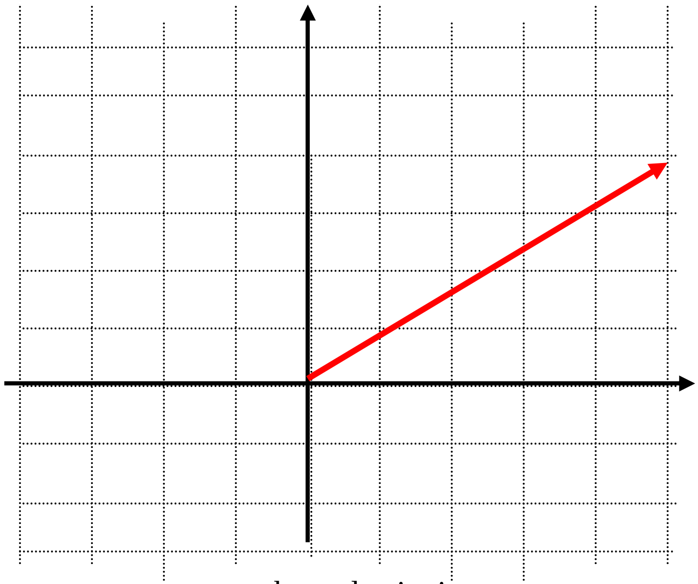
4.- Halla las coordenadas del vector de origen el punto *O(-2, -1)* y extremo el punto *A(3, 3)*

Solución:

Se obtienen restando a las coordenadas del extremo las coordenadas del origen, es decir,

$$OA = (3,3) - (-2,-1) = (5,4)$$

Podemos verlo geométricamente:



Para ir del origen al extremo tenemos que hacer lo siguiente:

- Avanzar 5 unidades hacia delante
- Subir 4 unidades

Luego las coordenadas son (5, 4)

.

5..- Calcula x para que ***a*** = *(5,2)* sea ortogonal a ***b*** = *(x,-5).*

<u>Solución:</u>

Se ha de verificar que el producto escalar sea cero, por tanto,

$a.b = 0 \Rightarrow (5,2).(x,-5) = 0 \Rightarrow 5x + 2.(-5) = 0$, es decir, 5x – 10 = 0 ⇒ x = 2

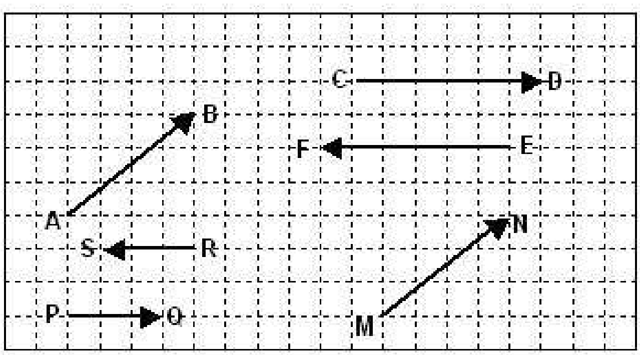
Ejercicios propuestos.

1.- Indica la opción correcta:

a) La velocidad de un cuerpo es una magnitud escalar, ya que queda completamente determinada por un número.
b) La velocidad es, simplemente, un concepto físico
c) La velocidad es una magnitud vectorial ya que para determinarla tenemos que especificar su módulo, su dirección y su sentido.

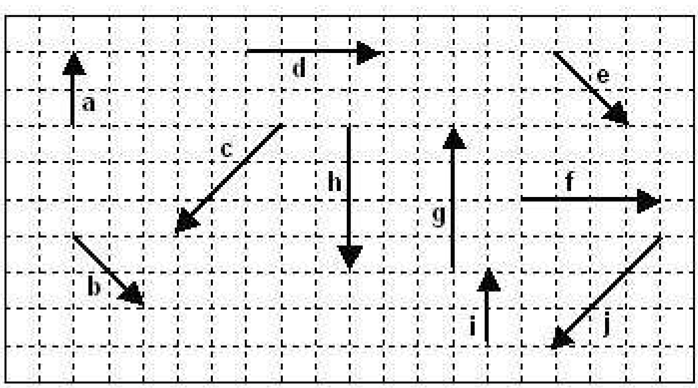
2.- Indíquese en la siguiente relación cuáles son magnitudes escalares y cuáles vectoriales: Peso, masa, fuerza, potencia, trabajo y aceleración.

3.-Observa el dibujo:



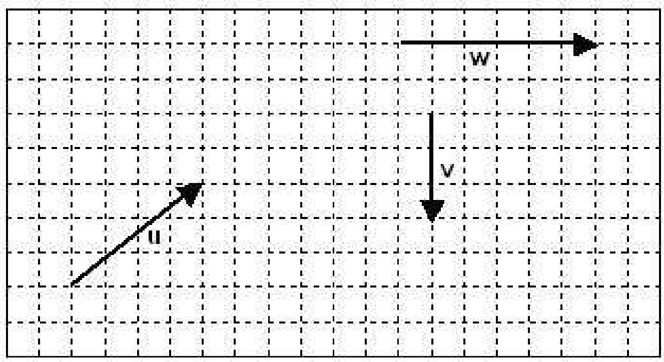
a) Indica el origen y el extremo de cada uno de los vectores representados.
b) Calcula el módulo de cada uno de ellos.
c) ¿Cuáles tienen el mismo sentido?
d) ¿Cuáles tienen sentido contrario?
e) ¿Cuáles tienen la misma dirección?

4.- Agrupa en conjuntos de vectores equipolentes

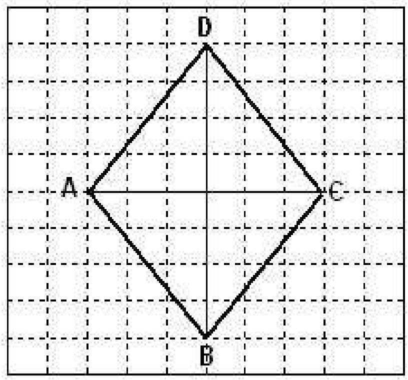


5.- Dibuja un vector que sumado con **u** dé cómo resultado el vector **w.**

Dibuja otro vector que sumado con **v** dé también como resultado **w**



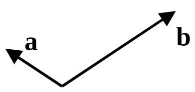
6.- Observa el rombo de la figura y calcula:



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=$

7.- Dados los vectores:

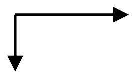
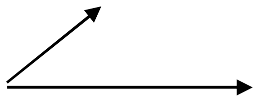
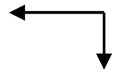


Representa gráficamente el vector $-3a+b$

8.- Dibuja:

a. Una base no ortogonal.
b. Una base ortogonal pero que no sea ortonormal.
c. Una base ortonormal

9.- Clasifica en ortogonales y no ortogonales las bases siguientes.

10.- Completa:

a) Dos vectores **x** e **y** del plano con distinta dirección forman una ___________, pues cualquier otro vector se puede expresar como ___________________________ de ellos.

b) Si los dos vectores que forman la base son ______________________ entre sí, se dice que forman una base ortogonal. Si, además, tienen de módulo 1, se dice que forman una base ______________________________________

11.- Dados los vectores **a**(3,-2), **b**(-1,2) y **c**(0,-5), calcula m y n de modo que

$$\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$$

12.- Las componentes de los vectores **u** y **v** en una cierta base son **u** = (2,-5) y **v** = (-3,2). Calcula:

a) **u** +**v** ; b) 4**v** ; c) 2**u**-3**v**

13.- Halla el módulo de los siguientes vectores: **a** = (3,4); **b** = (6,-8)

14.- Calcula el producto escalar de dos vectores **u** y **v** sabiendo que $|\mathbf{u}|=2$, $|\mathbf{v}|=3$ y que forman un ángulo de 30º.

15.- Halla el ángulo formado por los vectores $\boldsymbol{u} = -5i + 12j$ y $\boldsymbol{v} = 8i - 6j$.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS.

1.- Sabemos que $|\mathbf{u}|=3$ y que $\boldsymbol{u} = -2\boldsymbol{v}$. Calcula $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$

2.- Se sabe que el producto escalar de dos vectores ***a*** y ***b***, no nulos, es cero. ¿Qué se puede decir de la dirección de dichos vectores?.

3.- Dados los vectores $\boldsymbol{u} = 2i-3j$ y $\boldsymbol{v} = 5i + 4j$, referidos a una base ortonormal. Calcula:

a) Su producto escalar.

b) El módulo de cada vector.

c) El ángulo que forman.

4,- Los vectores $\boldsymbol{u} = (-1,1)$ y $\boldsymbol{v} = (0,2)$, ¿forman una base del plano?. Expresa el vector **a** = (5,2) como combinación lineal de dichos vectores.

5.- Calcula un vector perpendicular al vector **a** = (5,-3).

6.- Dado el vector $\boldsymbol{u} = 3i - 4j$, referido a la base canónica. Calcula un vector de la misma dirección y sentido que **u** y que sea unitario

7.- Dados los puntos $A(2,-5)$ y $B(-4,-7)$. Escribe las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$

8.- Sean los vectores u y v y conocemos que $||u|| = 2$, $||v|| = 5$ y el ángulo que forma es de 60º.

Calcula $||u+v||$ y $||u - v||$.

(Indicación: Aplica la relación $||v||^2 = v.v$ a la suma y a la diferencia de vectores pedida)

Sol. $\|u + v\| = \sqrt{39}$; $\|u - v\| = \sqrt{19}$